Rachunek prawdopodobieństwa MAP1151
Wydział Elektroniki, rok akad. 2011/12, sem. letni
Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

Wykład 5: Zmienne losowe typu ciągłego. Gęstość prawdopodobieństwa. Rozkład jednostajny, normalny, wykładniczy. Transformacje zmiennej losowej.

Definicja.

Zmienna losowa typu ciągłego (in. o rozkładzie ciągłym)
to zmienna losowa, dla której istnieje taka nieujemna funkcja $f(x)$, że dla każdego borelowskiego zbioru B

$$P_X(B) = \int\limits_B f(x)dx.$$

Funkcja $f(x)$ zwana jest **gęstością** rozkładu X.

Technika określania rozkładu zmiennej losowej X typu ciągłego:

Pełna informacja o **ciągłym** rozkładzie zmiennej losowej X zawarta jest w **gęstości** $f(x)$ rozkładu X.
Z gęstości możemy dostać informację o wartościach funkcji P_X na dowolnych zbiorach borelowskich, jak widać w definicji rozkładu ciągłego. W szczególności,

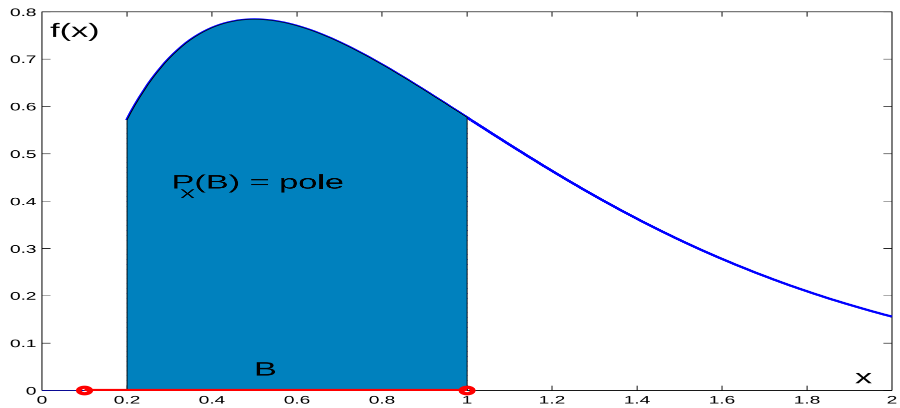
- $P(X < b) = P(X \leqslant b) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx;$
- $P(X \geqslant b) = P(X > b) = \int\limits_{b}^{\infty} f(x)dx;$
- $P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Funkcja $f(x)$ spełnia następujące warunki:

- $f(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Jeżeli pewna funkcja $f(x)$ spełnia te warunki, to dla pewnej ciągłej zmiennej losowej X funkcja $f(x)$ jest gęstością jej rozkładu. Funkcja f ma wtedy probabilistyczną interpretację, reprezentację, może być używana w modelach w roli gęstości rozkładu ciągłego.

Przykładowy wykres (X - czas pracy pewnego urzadzenia do pierwszej awarii):



Dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej X równa jest całce

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Wynika stąd, że dystrybuanta rozkładu ciągłego musi być funkcją ciągłą. Nie jest to jednak warunek wystarczający. Można pokazać, że:

FAKT. Jeżeli dystrybuanta $F(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną poza jedynie skończoną liczbą punktów, to rozkład jest ciągły oraz jego gęstość $f(x)$ równa jest

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{dla tych } x\text{, dla których pochodna istnieje} \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Przykłady do zad. 3.4 - 3.6

Transformacje zmiennej losowej

Problem:

Szukamy rozkładu zmiennej losowej $Y = g(X)$, gdzie X to zmienna losowa o rozkładzie zadanym dystrybuantą $F(x)$, zaś g to pewna funkcja, taka że Y to zmienna losowa, np. funkcja borelowska.

Wiemy, że dystrybuanta rozkładu Y ma postać $F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y)$, a zatem jakiś związek z F. Nie mamy tu jednak ogólnych przepisów.

Ważne przykłady:

1. **transformacja liniowa** $Y = aX + b$, gdzie a, b to pewne stałe, $a \neq 0$, tzn. $g(x) = ax + b$.
   Wtedy dla $a > 0$ mamy
   $$F_Y(y) = P(aX + b < y) = P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = F\left(\frac{y-b}{a}\right),$$
   natomiast dla $a < 0$
   $$F_Y(y) = P(aX + b < y) = P\left(X > \frac{y-b}{a}\right) = 1 - \lim_{x \to \frac{y-b}{a}+} F(x).$$

2. **funkcja kwadratowa** $Y = X^2$, tzn. $g(x) = x^2$.
   Wtedy
   $$F_Y(y) = P(X^2 < y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0 \\ P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}), & \text{gdy } y > 0 \end{cases} =$$
   $$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0 \\ F(\sqrt{y}) - \lim\limits_{x \to -\sqrt{y}+} F(x), & \text{gdy } y > 0 \end{cases}$$

3. **transformacja logarytmiczna** zmiennej losowej X dodatniej z prawd. 1
   $Y = \ln X$, tzn. $g(x) = \ln x$.
   Wtedy mamy
   $$F_Y(y) = P(\ln X < y) = P(X < e^y) = F(e^y).$$

4. **obcięcie**

Dla pewnej stałej $a > 0$ niech $Y = \begin{cases} X, & \text{gdy } |X| < a \\ a, & \text{gdy } X \geqslant a, \\ -a, & \text{gdy } X \leqslant -a, \end{cases}$,

tzn. $g(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } |x| < a \\ a, & \text{gdy } x \geqslant a, \\ -a, & \text{gdy } x \leqslant -a, \end{cases}$

Wtedy mamy $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant -a \\ F(y), & \text{gdy } -a < y \leqslant a \\ 1, & \text{gdy } a < y \end{cases}$

5. **dyskretyzacja**

wybieramy rosnący ciąg liczb $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$
i przyjmujemy, że $Y = x_n$ wtedy, gdy $x_{n-1} \leqslant X < x_n$ dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,
tzn. $g(x) = x_n$, gdy $x_{n-1} \leqslant x < x_n$.

Wtedy Y ma rozkład dyskretny określony ciągiem $\{(x_n, p_n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$,
gdzie $p_n = F(x_n) - F(x_{n-1})$.
Zatem $F_Y(y) = F(x_n)$ dla $x_n < y \leqslant x_{n+1}$- funkcja schodkowa

Przykłady do zad. 3.7