Topologia metryczna, Lista 6

(1) Wykazać, że ciąg (x_n) jest Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, ρ) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists k \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \; \rho(x_k, x_{k+n}) < \epsilon.$$

(2) Sprawdzić zupełność następujących przestrzeni:
   (a) płaszczyzny w metrykach ρ_m, ρ_s, "rzeka" i "centrum"
   (b) dowolnej przestrzeni z metryką dyskretną ρ_{01}.

(3) Niech $X = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$ z metryką euklidesową, a $f : X \to \mathbb{N}$ będzie określone wzorem $f(\frac{1}{n}) = n$. Sprawdzić, czy f jest homeomorfizmem i czy f przeprowadza ciągi Cauchy'ego w X na ciągi Cauchy'ego w $\mathbb{N}$. Czy przestrzenie X i $\mathbb{N}$ są zupełne?

(4) Czy odwzorowanie jednostajnie ciągłe między przestrzeniami metrycznymi zupełnymi musi przekształcać ciągi Cauchy'ego na ciągi Cauchy'ego?

(5) Pokazać, że jeśli odwzorowanie $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ jest izometrią i przestrzeń (X, ρ_X) jest zupełna, to (Y, ρ_Y) jest też zupełna.

   Uogólnić ten fakt na odwzorowania f, będące homeomorfizmami jednostajnymi, tj. takimi, że f oraz f^{-1} są jednostajnie ciągłe.

(6) Czy dowolny przedział otwarty na prostej euklidesowej jest metryzowalny w sposób zupełny? Jeśli tak, to podać wzór na równoważną metrykę zupełną w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

(7) Pokazać, że jeśli $A \subset X$ i podprzestrzeń A jest zupełna, to A jest zbiorem domkniętym w X.

(8) Przypomnijmy (patrz Lista 1), że przestrzeń $B(X, Y)$ odwzorowań ograniczonych z (X, ρ_X) w (Y, ρ_Y) ma metrykę zbieżności jednostajnej ρ_{sup}. Pokazać, że podprzestrzeń $C(X, Y) \subset B(X, Y)$ odwzorowań ciągłych jest podzbiorem domkniętym w $B(X, Y)$. Inaczej mówiąc, granica jednostajna ciągu odwzorowań ciągłych ograniczonych jest odwzorowaniem ciągłym.

   Pokazać, że jeśli (Y, ρ_Y) jest zupełna, to przestrzenie $B(X, Y)$ i $C(X, Y)$ też są zupełne.