

Procesy stochastyczne

Lista 2

We wszystkich zadaniach $N = N_t$ to proces Poissona o intensywności λ ; $B = B_t$ to standardowy ruch Browna, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t = [B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n]$ to wielowymiarowy ruch Browna.

Zadania oznaczone **T** są trudniejsze.

Wzór Itô dla procesu Itô. Niech X_t spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

a funkcja $f(t, x)$ ma ciągle pochodne cząstkowe $\partial_t f, \partial_x f, \partial_{xx} f$. Wtedy proces $Y_t = f(t, X_t)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dY_t = d(f(t, X_t)) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t, X_t)d\langle X \rangle_t,$$

gdzie wahanie kwadratowe procesu X jest równe $d\langle X \rangle_t = \sigma^2(t, X_t)dt$. W szczególności $d\langle B \rangle_t = dt$.

Zad. 1. Sprawdź, jakie są różniczki procesów

- a) $aB_t + b$ dla pewnych stałych a, b ,
- b) e^{B_t} ,
- c) $\sin(B_t)$.

Zad. 2. Sprawdź, jakie są różniczki procesów

- a) $(B_t)^2$,
- b) $(B_t - 1)^3$,
- c) $\frac{1}{B_t + c}$.

Zad. 3. Znajdź rozwiązania stochastycznych równań

- a) $dX_t = dt + 2\sqrt{X_t}dB_t$,
- b) $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$,
- c) $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2}dB_t$.

Przy rozwiązywaniu zwróć uwagę na zależność od warunków początkowych w chwili $t = 0$.

Zad. 4. Dla X_t spełniającego $dX_t = \mu_1(t, X_t)dt + \sigma_1(t, X_t)dB_t$ sprawdź, jakie stochastyczne równanie różniczkowe $dY_t = \mu_2(t, Y_t)dt + \sigma_2(t, Y_t)dB_t$ spełniają

- a) $Y_t = (X_t)^2$,
- b) $Y_t = e^{X_t}$.

Zad. 5. Załóżmy, że chcemy zredukować równanie różniczkowe $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$, upraszczając wyrazy stojące przed dt lub dB_t . Znajdź takie przekształcenie $f(x)$, aby proces $Y_t = f(X_t)$ spełniał równanie

- a) $dY_t = \tilde{\mu}(Y_t)dt + dB_t$, wyznacz też $\tilde{\mu}$,
- b) $dY_t = \tilde{\sigma}(Y_t)dB_t$, wyznacz też $\tilde{\sigma}$.

Zad. 6. Na cząstkę uwięzioną w potencjale harmonicznym w wodzie działają 3 najważniejsze siły: siła oporu ośrodka $-\beta \frac{dX}{dt}$, siła harmoniczna $-\kappa X$ oraz siła termiczna $D \frac{dB}{dt}$. Gdy cząstka nie doznaje dużych zmian pędu, suma sił na nią działających powinna w przybliżeniu wynosić 0. Zapisz powstałe równanie i zinterpretuj je jako równanie Itô. Następnie rozwiąż je z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.

Zad. 7. Rozwiąż równanie

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s \sigma_s dB_s.$$

Zad. 8. Pokaż, że rozwiązaniem równania

$$dX_t = m_t X_t dt + r_t X_t dB_t$$

jest

$$X_t = X_0 \exp \left(\int_0^t r_s dB_s + \int_0^t g_s ds \right).$$

Znajdź postać funkcji g .

Rozwiązanie (niemal) ogólnego liniowego stochastycznego równania różniczkowego. Niech proces X_t spełnia równanie

$$dX_t = (a_t X_t + b_t)dt + c_t dB_t.$$

Wtedy jest on postaci

$$X_t = \phi_t \left(X_0 + \int_0^t \frac{b_s}{\phi_s} ds + \int_0^t \frac{c_s}{\phi_s} dB_s \right),$$

gdzie $\phi_t = \exp \left(\int_0^t a_s ds \right)$.

Zad. 9. Udowodnij powyższe twierdzenie.

Zad. 10. Rozwiąż stochastyczne równanie różniczkowe na odcinku $[0, \pi/2)$.

$$dX_t = \frac{1}{\cos t} X_t dt + dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Wynik wyraż jako całkę po przyrostach brownowskich ze znanej funkcji (kombinacji funkcji elementarnych).

Zad. 11. Udowodnij, że $X_t := \frac{B_t}{t+1}$ rozwiązuje następujące stochastyczne równanie różniczkowe: $dX_t = -\frac{1}{t+1} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t$.

Zad. 12. Znajdź różniczkę stochastyczną procesu

$$Y_t := (X_t^1)^2 + (X_t^2)^2 + \dots + (X_t^d)^2$$

dla d niezależnych procesów Ornsteina-Uhlenbecka X_t^k . Czy potrafisz uprościć wyrażenie będące szumem losowym w różniczce Y_t ?

Zad. 13. Niech X będzie całkowalnym z kwadratem martyngałem zatrzymanym w czasie zatrzymania T . Udowodnij, że zatrzymany proces X^S również jest tej klasy dla dowolnego czasu zatrzymania S .

Zad. 14. **T** Udowodnij, że dla dowolnej klasy procesów \mathcal{C} mamy $(\mathcal{C}_{\text{loc}})_{\text{loc}} = \mathcal{C}_{\text{loc}}$.

Zad. 15. Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym, zaś Z_0 zmienną \mathcal{F}_0 -mierzalną. Udowodnij, że proces $Z_t := \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t)$ jest martyngałem lokalnym takim, że $dZ_t = Z_t dM_t$.

Zad. 16. **T** Niech $f: R_+ \rightarrow R_+$ będzie niemalejącą i ciągłą funkcją. Udowodnij, że istnieje ciągły martyngał M_t taki, że $\langle M \rangle_t = f(t)$.

Zad. 17. Czy jest prawdą, że jeśli $\langle M \rangle_t = \langle N \rangle_t$ dla lokalnie całkowalnych z kwadratem martyngałów $M, N \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$, to M i N mają taki sam rozkład?

Zad. 18. Niech B będzie ruchem Browna oraz H całkowalnym procesem takim, że $|H_t| = 1$ dla każdego t . Niech $M_t := \int_0^t H_s dB_s$. Udowodnij, że M jest także ruchem Browna.

Zad. 19. Oblicz $d\langle B^2 \rangle_t$ oraz $d\langle B, e^B \rangle_t$.

Zad. 20. Znajdź $d\langle X, Y \rangle_t$ dla $X_t = t^3 B_t$ i $Y_t = \int_0^t B_s^3 dB_s$.

Zad. 21. Udowodnij, że

$$\text{a) } \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{t}{2},$$

$$\text{b) } \int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

Zad. 22. **T** Znajdź jawną postać $\int_0^1 \mathbf{1}_{\{B_s=0\}} dB_s$.

Izometria Itô dla całki Itô. Niech X_t oraz Y_t będą \mathcal{F}_t^B mierzalnymi procesami takimi, że

$$\int_0^t \mathbb{E}[X_s^2] ds, \int_0^t \mathbb{E}[Y_s^2] ds < \infty$$

wtedy

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dB_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t Y_s dB_s \right] = 0$$

oraz

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dB_s \cdot \int_0^t Y_s dB_s \right] = \int_0^t \mathbb{E}[X_s Y_s] ds$$

Zad. 23. Oblicz

$$\text{Cov} \left(\int_0^2 B_s dB_s, \int_1^3 B_s dB_s \right).$$

Zad. 24. **T** Załóżmy, że $[B_t^1, B_t^2, B_t^3]$ jest trójwymiarowym ruchem Browna oraz

$$X_t := \int_0^t \sin(B_s^3) dB_s^1 + \int_0^t \cos(B_s^3) dB_s^2.$$

Wykaż, że X jest ruchem Browna.

Zad. 25. Jaki rozkład ma $B_3 + \int_0^4 s dB_s$?

Zad. 26. Oblicz średnią oraz wariancję zmiennej losowej $\int_0^1 |B_s| dB_s$.

Zad. 27. Rozwiąż równanie Langevina z ruchomym potencjałem

$$dX_t = -\lambda(X_t - r_t)dt + DdB_t, \quad X_0 = x_0,$$

które odpowiada ruchowi cząstki w potencjale harmonicznym, który ciągnie ją wzdłuż trajektorii r_t . Podaj równania na średnią i wariancję tego procesu.

Zad. 28. Oblicz

a) $\mathbb{E} \left[\int_0^t \cos(s) dB_s \cdot \int_0^t \sin(s) dB_s \right],$

b) $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t B_s dB_s \right)^2 \right].$

Zad. 29. Oblicz wariancję $\text{Var}(Y_t)$ procesów

a) $Y_t := \int_1^t (B_s - B_{s-1})^n dB_s, \quad t \geq 1, n \in \mathbb{N},$

b) $Y_t := \int_0^t \sqrt{|B_s|} dB_s.$

Zad. 30. Niech $K_t := \int_0^t \sqrt{2B_s^2 + 3} dB_s$ i $M_t := \int_0^t B_s dK_s$. Znajdź $\mathbb{E}[K_s K_t]$ dla $s < t$ oraz średnią i wariancję procesu M_t .

Zad. 31. Niech $X_t := \int_0^t \sqrt{|B_s| + 2} dB_s$. Znajdź funkcję kowariancji procesu X .

Zad. 32. Oblicz korelację między dwoma procesami Ornsteina-Uhlenbecka współdzielącymi szum

$$dX_t^1 = -\lambda_1 X_t^1 dt + dB_t, \quad dX_t^2 = -\lambda_2 X_t^2 dt + dB_t, \quad X_0^1 = X_0^2 = 0.$$

Zad. 33. Niech proces X_t będzie równy

$$X_t := \int_0^t \sigma_s dB_s + t,$$

dla pewnej funkcji σ_s . Oblicz funkcję średniej procesu $Y_t = X_t^3$ (wynik będzie zależał od σ_s). W tym celu rozważ stochastyczne równanie różniczkowe, jakie spełnia Y_t .

Zad. 34. Niech W^1 i W^2 będą niezależnymi ruchami Browna. Definiujemy: $B^1 := W^1$ oraz

$$B_t^2 := \int_0^t \rho_s dW_s^1 + \int_0^t \sqrt{1 - \rho_s^2} dW_s^2.$$

Udowodnij, że B^2 jest też ruchem Browna oraz że $d\langle B^1, B^2 \rangle_t = \rho_t dt$.

Zad. 35. Niech S_t będzie ceną akcji w czasie t , która rozwiązuje stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Oblicz dla $\mu = 1$ [1/mieś] oraz $\sigma = 2$ [1/zł], prawdopodobieństwo, że cena przekroczy poziom 45 za 4 miesiące jeśli jej obecna cena wynosi 38.

Zad. 36. **T** Dla procesu jak wyżej oblicz prawdopodobieństwo, że cena przekroczy poziom 45 w ciągu najbliższych 4 miesięcy.

Zad. 37. Znajdź wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X_t$ oraz wariancję $\text{Var}X_t$ dla procesu oprocentowania CIR danego równaniem stochastycznym:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t,$$

gdzie a, b i $\sigma > 0$ są ustalonymi parametrami.

Całka Itô jako martyngał. Niech X_t będzie \mathcal{F}_t^B mierzalny. Wtedy

$$Y_t = \int_0^t X_s dB_s$$

jest martyngałem.

Zad. 38. Użyj formuły Itô aby pokazać, że następujące procesy są martyngałami:

- a) $X_t := e^{t/2} \cos B_t$,
- b) $X_t := e^{t/2} \sin B_t$,
- c) $X_t := (B_t + t)e^{-B_t - t/2}$,
- d) $X_t := B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$

Zad. 39. Dla jakich α, β proces $e^{\beta t} \cos \alpha B_t$ jest martyngałem?

Zad. 40. Niech

$$Y_t := tB_t - \int_0^t B_s ds, \quad Z_t := \exp\left(Y_t - \frac{1}{6}t^3\right).$$

Pokaż, że Z_t jest martyngałem względem naturalnej filtracji ruchu Browna.

Zad. 41. **T** Niech process X rozwiązuje następujące równanie stochastyczne:

$$dX_t = mX_t dt + sX_t dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Dla jakiej liczby rzeczywistej β proces $(X_t)^\beta$ jest martyngałem? Znajdź $P(X_\tau = 2)$ dla $\tau = \inf\{t \geq 0: X_t \notin (\frac{1}{2}, 2)\}$.

Zad. 42. Niech

$$\beta_k(t) := \mathbb{E}[B_t^k]; \quad k = 0, 1, 2, \dots; t \geq 0.$$

Użyj formuły Itô aby udowodnić, że

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds; \quad k \geq 2.$$

Znajdź

$$\mathbb{E}[B_t^6].$$

Zad. 43. **T** Niech proces X rozwiązuje stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t} dt + dB_t, \quad 0 \leq t < 1, \quad X_0 = a.$$

Udowodnij, że $\lim_{t \uparrow 1} X_t = b$ a.s. Proces X_t nazywany jest mostem Browna.

Zad. 44. **T** Znajdź rozkład stacjonarny modelu Vašíčka, czyli procesu X_t rozwiązującego następujące SDE:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t,$$

$a, b, \sigma > 0$ są ustalonymi stałymi. W tym celu udowodnij, że gęstość tego rozkładu stacjonarnego rozwiązuje równanie Fokkera-Plancka (bez składowej związanej z pochodną cząstkową ∂_t).

Zad. 45. Udowodnij, że równanie stochastyczne

$$dX_t = 3X_t dt - 5 \cos X_t dB_t, \quad X_0 = 7$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zad. 46. **T** Oblicz $\int_0^\tau B_s dB_s$ dla $\tau = \inf\{t \geq 0: B_t = \sqrt{t+2}\}$.

Zad. 47. **T** Znajdź równanie różniczkowe, które spełnia funkcja

$$u(t, x) := \mathbb{E} \left[\cos(x + B_t) \exp \left(- \int_0^t (x + B_s) ds \right) \right].$$

Zad. 48. Proces X rozwiązuje następujące SDE:

$$dX_t = \cos X_t dB_t + 3X_t dt.$$

Jaki jest jego infinitezymalny generator i jego dziedzina?

Zad. 49. Znajdź proces X_s^T taki, że

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T X_s^T dB_s$$

dla $F \in L^2(\mathcal{F}_T^B, P)$ postaci

- a) $F = B_T$,
- b) $F = B_T^2$,
- c) $F = e^{B_T}$,

Zad. 50. Znajdź proces X_s^T taki, że

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T X_s^T dB_s$$

dla $F \in L^2(\mathcal{F}_T^B, P)$ postaci

- a) $F = B_T^3$,
- b) $F = \int_0^T B_s dB_s$,
- c) $F = \sin B_T$.

Całka Stratonowicza. Całkę w sensie Stratonowicza możemy zdefiniować jako sumę całki w sensie Itô oraz deterministycznej

$$\int_0^t \sigma(s, B_s) \circ dB_s := \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x \sigma(s, B_s) ds + \int_0^t \sigma(s, B_s) dB_s.$$

Równanie różniczkowe w sensie Stratonowicza można rozważać jako równanie w sensie Itô. Równanie Stratonowicza z $\circ dB_t$

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dB_t$$

jest równoważne równaniu

$$dX_t = \left(\mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \partial_x \sigma(t, X_t) \sigma(t, X_t) \right) dt + \sigma(t, X_t) dB_t,$$

gdzie druga różniczka jest rozumiana w sensie Itô.

Zad. 51. Niech $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$. Wyraż to równanie w sensie Itô jako równanie w sensie Stratonowicza. Co dzieje się w sytuacji, gdy σ nie zależy od X_t , tzn. $\sigma(t, X_t) = \sigma(t)$?

Wzór Itô dla n procesów Itô. Jeśli procesy $X_t^i, i \in \{1, \dots, n\}$ spełniają stochastyczne równania różniczkowe

$$dX_t^i = \mu_i(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(t, X_t^1, \dots, X_t^n)dB_t^k,$$

gdzie B^i to niezależne ruchy Browna, to proces $Y_t = f(t, X_t^1, \dots, X_t^n)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dY_t = f_t dt + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j} f d\langle X^i, X^j \rangle_t$$

gdzie f oraz jej pochodne obliczane są w punkcie (t, X_t^1, \dots, X_t^n) , a kowariancie kwadratowe $d\langle X^i, X^j \rangle_t$ obliczamy według reguły: z iloczynu różniczek $dX_t^i dX_t^j$ wyrzucamy wszystkie człony z $dt dt, dt dB_t^i$ oraz $dB_t^i dB_t^j, i \neq j$ a w członach z $dB_t^i dB_t^i$ zastępujemy ten iloczyn dt .

Zad. 52. Oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

a) $X_t = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2$ (gdzie $[B^1, B^2]$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna);

b) $X_t = [B_t^1 + B_t^2 + B_t^3; (B_t^2)^2 - B_t^1 B_t^3]$, (gdzie $[B^1, B^2, B^3]$ jest trójwymiarowym ruchem Browna).

Zad. 53. Rozwiąż wieloczynnikowe równanie stochastycznego wzrostu

$$dX_t = rX_t dt + X_t \left(\sum_{i=1}^n \alpha_n dB_t^n \right), \quad X_0 = x_0.$$

Zad. 54. **T** Niech $Z_t := B_t^1 + iB_t^2$ będzie zespolonym ruchem Browna. Oblicz różniczkę stochastyczną zespolonego procesu $X_t = f(Z_t)$. Co się stanie, kiedy f jest holomorficzną, tj. dla $z = x + iy, f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ $\partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$?

Zad. 55. Udowodnij pełny stochastyczny wzór na całkowanie przez części

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s.$$

Zad. 56. Rozwiąż równanie

$$dX_t = rdt + \alpha X_t dB_t, \quad X_0 = 1$$

Wsk.: Możesz użyć stochastycznego czynnika całkującego

$$F_t = \exp\left(-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right).$$

Zad. 57. **T** Wykaż, że proces

$$X_t := \frac{e^{5B_t - \frac{25}{2}t}}{1 + \int_0^t e^{5B_s - \frac{25}{2}s} ds}$$

spełnia następujące SDE

$$dX_t = 5X_t dB_t - X_t^2 dt, \quad X_0 = 1.$$

Zad. 58. **T** Rozwiąż następujące równanie różniczkowe:

$$dX_t = X_t^\gamma dt + X_t dB_t.$$

Dla jakich γ uzyskamy eksplozję rozwiązania?

Wsk.: Patrz Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Ex. 5.16.

Liniowe równania stochastyczne o stałych współczynnikach. Niech układ stochastycznych równań różniczkowych będzie o stałych współczynnikach, to znaczy postaci

$$d\mathbf{X}_t = A\mathbf{X}_t dt + d\mathbf{B}_t,$$

gdzie \mathbf{X} jest kolumnowym wektorem procesów $\mathbf{X}_t = [X_t^1, \dots, X_t^N]^T$, A pewną stałą macierzą deterministyczną $N \times N$, a $d\mathbf{B}$ kolumnowym wektorem niezależnych różniczek ruchów Browna postaci $d\mathbf{B}_t = [\sigma_1 dB_t^1, \dots, \sigma_N dB_t^N]^T$ przeskalowanym przez stałe σ_N .

Dla takiego układu równań, rozwiązanie jest takiej samej postaci jak dla równań deterministycznych, to znaczy

$$\mathbf{X}_t = e^{At}\mathbf{X}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} d\mathbf{B}_s,$$

gdzie e^{At} to eksponenta macierzowa.

Zad. 59. Rozwiąż układ równań różniczkowych

$$d\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_t dt + d\mathbf{B}_t, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{0},$$

gdzie $d\mathbf{B}_t = [dB_t^1, dB_t^2]^T$.

Zad. 60. Rozwiąż układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt + dB_t^1, & X_0 = 1 \\ dY_t = Y_t dt + 2dB_t^2, & Y_0 = 0. \end{cases}$$

Zad. 61. **T** Obwód elektryczny, w którym płynie ładunek Q_t o natężeniu $I_t = \frac{dQ}{dt}$, składający się z oporu R , cewki L , kondensatora C oraz źródła siły elektromotorycznej \mathcal{E}_t połączonych szeregowo, jest opisany równaniem

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}.$$

a) Zinterpretuj równania na Q_t oraz I_t jako układ równań stochastycznych, zakładając, że siła elektromotoryczna to termiczne fluktuacje występujące w kablach: $\mathcal{E}_t dt = dB_t$.

b) Rozwiąż powstały układ równań dla $L = 1, R = 3, C = 1/2$ z warunkiem początkowym $Q_0 = I_0 = 0$.

c) Oblicz $\mathbb{E}[I_t^2]$ korzystając z izometrii Itô.

Zad. 62. **T** Cząstka dryfująca w cieczy i złapana w potencjale harmonicznym porusza się zgodnie z równaniem Newtona

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = F_h + F_{op} + F_{th},$$

gdzie $F_h = -kX$ to siła pułapkująca, $F_{op} = -\beta \frac{dX}{dt}$ to siła oporu cieczy, a $F_{th} = \frac{dB}{dt}$ to fluktuacje termiczne, wywołujące dyfuzję.

a) Wprowadzając zmienną $V = \frac{dX}{dt}$ zapisz równanie Newtona jako układ stochastycznych równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

b) Rozwiąż ten układ równań dla $m = 2, \beta = 8, k = 6$ z zerowymi warunkami początkowymi.

Wzór Itô dla równania Stratonowicza. Niech X_t spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dB_t,$$

a funkcja $f(t, x)$ ma ciągle pochodne cząstkowe $\partial_t f, \partial_x f$. Wtedy proces $Y_t = f(t, X_t)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dY_t = d(f(t, X_t)) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t.$$

Zad. 63. Oblicz całki stochastyczne

a)

$$\int_0^t \sin(B_s) ds + \int_0^t s \cos(B_s) \circ dB_s$$

b)

$$\int_0^t B_s e^{sB_s} ds + \int_0^t s e^{sB_s} \circ dB_s$$

Zad. 64. Rozważając $f(B_t)g(B_t)$ udowodnij wzór na całkowanie przez części dla całki Stratonowicza. Następnie podaj analogiczny wzór na całkowanie przez części dla całki Itô.

Zad. 65. Rozwiąż stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = m_t X_t dt + r_t X_t \circ dB_t.$$

Wynik porównaj z wynikiem dla równania o tych samych współczynnikach, interpretowanego w sensie Itô (tzn. z $r_t X_t dB_t$).

Zad. 66. Udowodnij wzór Itô dla równania Stratonowicza, opierając się na klasycznym wzorze Itô i relacji między równaniami Itô oraz Stratonowicza.

Zad. 67. Rozwiąż stochastyczne równania różniczkowe

a)

$$dX_t = e^{-X_t} \circ dB_t,$$

b)

$$dX_t = (1 + X_t^2) \circ dB_t,$$

c)

$$dX_t = X_t dt + \sqrt{e^{2t} - X_t^2} \circ dB_t.$$